

## **«Modélisation de l'écoulement et du transport en milieu poreux - Application de la Méthode des Lignes aux écoulements densitaires»**

Les eaux souterraines représentent un essentiel réservoir d'où l'on peut tirer une eau de bonne qualité pour l'approvisionnement en eau potable. L'amélioration de la compréhension des mécanismes d'écoulement et de transport de ces eaux et la modélisation de sa pollution sont indispensables à une meilleure gestion d'une ressource qui a un intérêt économique important. Parce que le milieu souterrain est difficile d'accès, le modèle numérique est le seul outil qui permet par simulation de comprendre et de prévoir la propagation du polluant. L'objectif principal de ce travail est de développer des méthodologies efficaces capables de résoudre les Equations aux Dérivées Partielles (EDP) décrivant les processus d'écoulement et de transport dans le milieu souterrain.

La première partie de ce travail est consacrée à la modélisation de l'écoulement en milieu poreux saturé. Dans le cas d'un milieu hétérogène, des études récentes ont montré que le champ de vitesse obtenu par les méthodes numériques classiques (type éléments finis) n'est pas assez précis. Pour pallier à ce problème, l'équation d'écoulement est résolue avec la méthode des Eléments Finis Mixtes (EFM). L'idée avec cette méthode est d'approcher simultanément les champs de pression et de vitesse. La méthode est localement conservative et aboutit à un champ de vitesse précis même en milieu fortement hétérogène. Cependant, cette méthode peut présenter des problèmes de convergence pour des maillages quadrangulaires déstructurés ainsi des oscillations non physiques lors de l'utilisation de petits pas de temps [1]. Ces oscillations sont dues au non respect du principe du maximum discret. Dans la première partie de la thèse, nous avons développé une nouvelle formulation de la méthode des EFM pour les quadrangles convexes et non convexes. Avec cette formulation, chaque quadrangle est considéré (fictivement) comme une agrégation de triangles. Il s'agit ensuite d'appliquer la méthode des EFM avec condensation de masse (EFMC) développée en [2] à chaque triangle intérieur. L'inversion d'un système local traduisant la continuité des flux et des pressions à travers les facettes intérieures, nous permet d'avoir les flux sur les facettes des quadrangles en fonction uniquement des traces de pression extérieures. Avec cette technique, les propriétés du milieu poreux, la pression et la divergence des flux peuvent varier à l'intérieur des quadrangles pour mieux décrire le milieu hétérogène. La matrice obtenue est symétrique définie positive et possède la même dimension que la matrice obtenue avec l'approche standard.

Des expériences numériques sur des milieux hétérogènes et avec des maillages non convexes ont montré les performances de la nouvelle approche. En régime transitoire, elle permet de s'affranchir des oscillations non physiques rencontrées lors de l'utilisation de petits pas de temps.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous nous sommes intéressés aux problèmes de transport de soluté avec prise en compte des contrastes de densité et/ou de viscosité. Dans ce cas, les équations d'écoulement et de transport deviennent couplées par les équations d'état traduisant la variation de la densité et de la viscosité en fonction de la fraction massique.

Ces dernières années, plusieurs études se sont intéressées à la discrétisation spatiale du système écoulement - transport. Cependant, peu d'efforts ont été consacrés à la discrétisation temporelle ainsi qu'aux méthodes de linéarisation du système obtenu. Ainsi, le modèle standard utilise généralement une approche de séparation d'opérateurs qui consiste à résoudre l'écoulement et le transport séquentiellement et à itérer entre les deux opérateurs jusqu'à la convergence. Cette technique permet (i) d'utiliser des méthodes appropriées pour chaque

opérateur et (ii) réduire les dimensions des systèmes à résoudre. Cependant, la convergence obtenue est souvent lente ce qui rend les temps de calculs prohibitifs surtout pour des systèmes fortement non linéaires [3]. La discrétisation temporelle est souvent limitée au premier ordre et la gestion des pas de temps est basée sur le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence.

Notre travail, dans cette deuxième partie, a consisté à développer la méthode des lignes (MOL) pour les écoulements densitaires. L'objectif est de combiner des méthodes robustes de discrétisation spatiale avec une discrétisation temporelle d'ordre supérieur et d'utiliser par la suite une méthode de linéarisation efficace.

La méthode des Lignes permet de transformer le système EDP en équations différentielles ordinaires (EDO) en discrétisant seulement les dérivées spatiales. Dans notre cas, cette discrétisation spatiale est basée sur la méthode de séparation d'opérateurs. L'équation d'écoulement est discrétisée avec les EFM avec condensation de masse, le terme dispersif est discrétisé avec la méthode de Volumes Finis Multipoints (MPFA) et la méthode des Eléments Finis Discontinus de Galerkin (DG) a été employée pour le terme convectif. Cette combinaison EFM, DG et VFM est très efficace pour la modélisation des écoulements densitaires [4].

Pour l'intégration en temps du système EDO obtenu, nous avons utilisé le solveur DLSODIS. La méthode Backward Differential Formula (BDF) avec un ordre d'intégration et des pas de temps variables est utilisée dans ce solveur [5]. La linéarisation du système est faite avec la méthode de Quasi Newton où la même matrice Jacobienne peut être utilisée sur plusieurs itérations (ou pas de temps) ce qui permet de réduire considérablement le temps de calcul. L'erreur en temps est mesurée à la fin de chaque calcul, ce qui permet de choisir l'ordre d'intégration ainsi que la largeur du pas de temps pour le calcul suivant. Ce nouveau schéma a été ensuite comparé au schéma standard. Plusieurs expériences numériques sont effectuées et mettent en valeur la robustesse et l'efficacité du nouveau modèle. Il consomme souvent 20 à 30 fois moins de temps de calcul que le modèle standard.

## Références

- [1] Brezzi F, Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods. New York:Springer; 1991..
- [2] Younes A., Ackerer P., Lehmann F., A new mass lumping scheme for the mixed hybrid finite element method International Journal for Numerical Methods in Engineering (2006); 67:89–107.
- [3] Lang S, Wittum G. Large-scale density-driven flow simulations using parallel unstructured grid adaptation and local multigrid methods. Concurr Computat: Paract Exp 2005; 17:1415-1440.
- [4] Ackerer P, Younes A. Efficient approximations for the simulation of density driven flow in porous media. Adv Water Res 2008;31:15-27.
- [5] Hindmarsh AC. LSODE and LSODI, tow new initial value ordinary differential equation solvers, SIGNAL Newsletter 1980; 15:10-11.